E-Book ISBN 978-987-1676-24-8.
Fecha de catalogación: 19/12/2014.

Serie Didactica Nro. 10

Facultad de Ciencias Forestales
UNIVERSIDAD NACIONAL DE SANTIAGO DEL ESTERO

CÁTEDRA DE
ECONOMÍA Y ADMINISTRACIÓN FORESTAL

LA PROGRAMACION LINEAL APLICADA AL MANEJO FORESTAL

Marta CORONEL DE RENOLFI
Publio A. ARAUJO

Versión actualizada
Agosto de 2004

PRÓLOGO

La Programación Lineal es una técnica utilizada en el planeamiento que hace uso de modelos matemáticos, consistentes en sistemas de ecuaciones, para resolver problemas de asignación eficiente de recursos limitados.

Si bien es el método de optimización más ampliamente difundido y utilizado en diferentes campos de la ingeniería, de la economía y del manejo de recursos naturales, y universalmente empleado en la planificación forestal, no es frecuente su aplicación a problemas de la actividad forestal en nuestro país.

El rápido progreso de la informática y el fácil acceso al trabajo diario con computadoras, hacen de esta técnica un eficaz instrumento para la gestión de las empresas y los productores del sector.

La presente serie didáctica, titulada ***La programación lineal aplicada al manejo forestal**,* ha sido concebida para que los estudiantes tengan un material de lectura adecuado y sencillo como introducción al estudio de la programación lineal.

Las bases teóricas se exponen de un modo fácil y accesible; y los ejemplos, resueltos e interpretados paso a paso, facilitan la comprensión de los conceptos teóricos.

Esperamos que estas notas didácticas cumplan con su finalidad, esto es, facilitar la enseñanza, el aprendizaje y la aplicación de la programación lineal, valiosa herramienta de la planificación empresarial.

Los autores

ÍNDICE DE CONTENIDOS

LA PROGRAMACION LINEAL APLICADA AL MANEJO FORESTAL

Marta Coronel de Renolfi[1]
Publio Alejandro Araujo[2]

1. INTRODUCCION

La empresa forestal es una unidad de producción en la que pueden realizarse diferentes actividades o procesos productivos. La disponibilidad de recursos de la empresa y las condiciones agroecológicas y económicas del medio en que se encuentra, determinarán el tipo de actividades que puede desarrollar y sus resultados. Todo recurso disponible sólo en cantidad limitada puede considerarse como un insumo limitante o restricción.

Cuando la empresa forestal concibe un plan de producción siempre existen diferentes alternativas o medios para alcanzar los objetivos propuestos. Una eficiente organización económica de la empresa forestal debe buscar aquella alternativa o combinación de actividades que conduzcan a un equilibrio óptimo y a buenos resultados económicos.

La elección de una determinada alternativa puede basarse en la intuición o en la ayuda de técnicas de análisis, cuya complejidad puede variar de acuerdo con las circunstancias de cada empresa. Si se opta por estas últimas, el análisis puede ser efectuado a través de un **modelo de decisión** que represente matemáticamente la realidad de la empresa. Ello posibilita la resolución de problemas mediante la elección de aquellas alternativas que conduzcan a la mayor eficiencia posible [Regúnaga, 1982].

Si se reconoce la importancia de la optimización en la toma de decisiones durante el planeamiento de la empresa forestal, se torna necesario seleccionar un mecanismo de determinación de dicho óptimo. La teoría de la producción orienta en este sentido, con base en los principios de optimización, maximización de las ganancias o minimización de los costos [Díaz, 1994].

[1] Cátedra de Economía y Administración Forestal. ITM. FCF-UNSE. mrenolfi@unse.edu.ar
[2] Cátedra de Ordenación de Montes. INSIMA. FCF-UNSE. paraujo@unse.edu.ar

2. LOS MÉTODOS DE PROGRAMACIÓN MATEMÁTICA

Un modelo de decisión es una representación matemática de la realidad. Los modelos corrientemente utilizados en la planificación empresarial son:

- Modelos de Simulación
- Modelos de Optimización

Los Modelos de Simulación, cuya versión más simple es el método de los presupuestos totales, son métodos descriptivos, de aproximaciones sucesivas, en los que se establecen *a priori* planes de producción, evaluándose luego cuál de ellos es el mejor. Por el contrario, los Modelos de Optimización son herramientas normativas que se basan en la teoría marginalista y calculan el plan óptimo a partir del concepto del mejor uso alternativo de los factores productivos; van seleccionando las actividades de mayor productividad marginal respecto de cada uno de los recursos. Dentro de estos últimos modelos se encuentra los métodos de programación matemática u optimización restrictiva. Según Hernández Díaz [1985] los métodos de programación matemática se clasifican entre otros en:

- Método de Programación Lineal
- Método de Programación Cuadrática
- Método de Programación Entera
- Método de Programación Dinámica
- Método de Programación Estocástica

La programación matemática y su forma especial más popular, la **Programación Lineal**, ha encontrado especial aplicación en variadas y múltiples facetas de los negocios. Es una herramienta ampliamente difundida y utilizada en diferentes campos de la ingeniería, de la economía y del manejo de recursos naturales. Los problemas de transporte y de planificación productiva son los objetos más típicos del análisis por programación lineal [Schrage, 1999].

Los economistas rurales utilizan la programación lineal para determinar la distribución óptima de recursos disponibles, los costos mínimos de la formulación de raciones, el equilibrio espacial en la producción de bienes agrícolas y su almacenamiento, la unidad económica de producción, etc. En el sector forestal, tiene aplicaciones en la determinación de costos mínimos en los modelos de transporte y en la determinación la edad óptima de corta, entre otros usos. A modo de ejemplos se pueden citar los siguientes trabajos publicados: de Díaz Balteiro y Prieto Rodríguez [1999], donde se muestra que la aplicación a la ordenación de montes de métodos y técnicas de planificación basados en la programación lineal es no sólo factible, sino que puede proporcionar resultados muy interesantes al gestor forestal; de Díaz [1994], en el cual se efectúa un estudio de factibilidad económica donde se aplican las técnicas de programación lineal, a unidades de producción de pequeños productores de una zona rural de la provincia de Misiones; y de Gargano, Adúriz y Saldungaray, [1999], cuyo objetivo es la elaboración de modelos productivos sostenibles utilizando la secuencia metodológica de la programación lineal y el método Monte Carlo.

3. ORIGENES Y CONCEPTOS DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL

La programación lineal no es una técnica reciente. Se aplicó por primera vez en la época de la Segunda Guerra Mundial para solucionar problemas de transporte y dieta de los soldados. En 1947, el Dr. George Dantzing y sus colaboradores desarrollaron el “método Simplex” como un procedimiento de solución que permite reducir el número de pasos necesarios para optimizar un modelo de programación lineal. Dantzing aplicó este enfoque para resolver el programa de abastecimiento de la Fuerza Aérea Norteamericana, advirtiendo que también podría aplicarse a problemas de decisiones empresariales, que es una de las aplicaciones actuales [Cordonier, 1973; Hernández Díaz, 1985 y Mansfield, 1990].

La aplicación de la programación lineal a problemas de la empresa agraria data desde comienzos de la década de los años ’50. Los primeros trabajos fueron publicados en Estados Unidos por Hildreth, King, Heady y otros. Los economistas agrarios adoptaron rápidamente el nuevo método pese a las dificultades iniciales en lo que respecta al acceso a las computadoras y a la capacitación en la nueva técnica [Frank, 2001].

Williams [1990] define a la Programación Lineal (en adelante PL) como una técnica puramente matemática que puede utilizarse en la planificación y manejo de tierras para la asignación óptima de recursos escasos. Este método permite elegir un plan óptimo correspondiente al valor extremo de un determinado **objetivo,** expresado bajo la forma de una función lineal que representa las **actividades posibles**, respetando o sujeto a **restricciones** de tipo lineal, que limitan la extensión de dichas actividades. La técnica de programación lineal es un método de optimización en el sentido de llegar invariablemente al óptimo [Frank, 2001].

4. COMPONENTES DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL

De acuerdo con el concepto recién enunciado por Williams [1990], se reconocen tres componentes de la programación lineal:

- Función Objetivo
- Actividades posibles
- Restricciones

Función objetivo

La función objetivo debe definirse claramente y en forma matemática como una ecuación lineal. Dicha función se orienta a optimizar algún criterio de valor; lo que se optimiza es una función matemática que contiene los resultados. La función matemática del objetivo puede resolver dos tipos de problemas:

a) Maximizar un determinado criterio de valor (margen bruto total, producción total, ingreso total, beneficio total, etc.)
b) Minimizar un criterio de valor (costo total, uso de un determinado recurso, etc.).

Actividades posibles

El término actividad se utiliza aquí con un sentido amplio y corresponde a cada uno de los procesos alternativos que se pueden efectuar en el seno de una empresa, como por ejemplo: cultivos, producción de bienes, compra de insumos, contratación de personal, labores culturales, venta de productos, implantación de especies, planes de manejo o tratamientos silviculturales.

Las alternativas deben ser necesariamente más de una para que tenga sentido el uso de la programación lineal. De no ser así, la solución del problema sería trivial. Cuanto mayor sea el número de alternativas, más útil resulta el método.

Restricciones

El tercer componente son las restricciones. Las alternativas se hallan sujetas a restricciones o limitaciones dadas por condiciones que se deben cumplir, como por ejemplo, no sobrepasar (restricción de máximo) los recursos disponibles o cumplir con determinados requisitos mínimos. Cada actividad consume una cierta cantidad de recursos (tierra, capacidad de planta, capital o mano de obra), los cuales están en cantidades limitadas en la empresa.

Para que exista una solución, los recursos deben hallarse disponibles sólo en cantidades limitadas y son los que acotan la solución. Tratándose de un método de optimización, se considera el mejor uso de los recursos en relación con la función objetivo. Si se dispone de cantidades ilimitadas de recursos para alcanzar el objetivo tampoco es necesario planificar porque se hace innecesario un uso racional de los insumos.

5. SUPUESTOS BÁSICOS DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL

La búsqueda de una solución óptima mediante el uso de la PL implica la preparación de un modelo. Una de las limitaciones del uso de los modelos matemáticos de programación lineal en los problemas económicos reside en su naturaleza metodológica, pues estos modelos son normativos en el sentido que indican la mejor solución, “lo que debería hacerse” [Buongiorno y Gilless, 1987].

La elaboración del modelo matemático tiene limitaciones de naturaleza técnica; su formulación está basada en las siguientes hipótesis fundamentales [Rehman, 2001]:

- Linealidad: las relaciones insumo-producto y las combinaciones entre insumos son fijas, independientemente de la dimensión que tome la actividad. La PL no toma en cuenta los rendimientos marginales físicos decrecientes: se trabaja como si solamente se dieran rendimientos constantes a escala. Sin embargo, este supuesto de la linealidad no ha sido generalmente un obstáculo importante en la aplicación práctica de la programación lineal debido a que dentro de límites amplios, se puede aceptar una linealidad sin distanciarse mayormente de la realidad.

- No negatividad: las actividades sólo pueden tener valores iguales o mayores a cero.

- Divisibilidad: todas las actividades son continuas y pueden tomar cualquier valor, sea entero o fraccionario.

- Aditividad: los efectos de las diferentes actividades son independientes y se suman en forma algebraica. No hay interacción entre variables, es decir que una misma porción de recurso no puede usarse para producir dos actividades diferentes. Esto significa que las actividades no son complementarias.

- Proporcionalidad: las cantidades de insumos consumidas (o aportadas) por cada actividad son siempre proporcionales al nivel de actividad. En otros términos, los niveles de utilización de los recursos por unidad de actividad se suponen constantes. Si por ejemplo para producir 1 ha de trigo se necesitan 25 horas de trabajo, $ 250 para abonos y $ 30 para combustible, entonces producir 10 has exigirá 250 horas, $ 2.500 de abonos y $ 300 de combustibles.

- Certeza de datos: se suponen ciertos los datos utilizados. Las actividades incluidas en el modelo son todas las posibles y los datos utilizados son lo que se darán en la realidad.

6. VENTAJAS Y DESVENTAJAS DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL

Según Hernández Díaz [1985] la programación lineal tiene las siguientes ventajas:

1) Permite comprar un alto rango de soluciones alternativas y analizar sus consecuencias, requiriendo para ello poco tiempo gerencial.
2) Indica al administrador como emplear eficazmente sus factores, seleccionándolos y distribuyéndolos adecuadamente.
3) Permite al administrador ser mas objetivo en sus decisiones por la posibilidad de formular matemáticamente el problema.
4) Permite modificaciones a la solución matemática a favor de la convivencia de la empresa, mediante la inclusión o reformulación de las restricciones.
5) Posibilita identificar los “cuellos de botella”[3] en las operaciones actuales.

Por otra parte, el método presenta como desventajas las limitaciones propias de cualquier técnica matemática. Entre las limitaciones se encuentran aquellos aspectos que esta técnica no resuelve, como por ejemplo:

a) No formula expectativas de precios: éstos deben ser datos conocidos para resolver el problema.

b) No estima las relaciones insumo-producto: debe contarse con los datos de cantidad y distribución de mano de obra, tierra y capital necesarios.

c) No resuelve situaciones de riesgo: la programación lineal se basa en el supuesto de la certeza de los datos, esto es, se suponen confiables los datos de precios, producciones, requerimientos, etc.

7. FORMULACIÓN MATEMÁTICA DEL PROBLEMA

La programación lineal resuelve el problema de determinar la mejor combinación de actividades que no utilice más recursos que los realmente disponibles y que optimice la función objetivo.

La búsqueda de un óptimo económico mediante la PL implica la preparación de un modelo matemático, es decir de un sistema de ecuaciones lineales que

[3] Término utilizado para indicar los recursos más limitantes.

representen en forma aproximada la realidad de la empresa. La programación lineal es la aplicación del álgebra matricial a la solución de estas ecuaciones. Se utiliza como modelo de la empresa una matriz que contiene para cada actividad, la cantidad de cada uno de los recursos requeridos y aportados. Con un procedimiento matemático se determina el óptimo para el modelo, sobre la base de los costos de oportunidad de los recursos. La labor más difícil de esta técnica es reconocer y formular el problema a través de un modelo matemático [Frank, 2001].

La elaboración del modelo matemático que describa una situación particular a resolver en la empresa, es una de las partes mas delicadas y laboriosas del método. Consiste en el arte de expresar en una serie de ecuaciones todos los aspectos que definen el problema a optimizar.

Un problema de PL puede presentarse matemáticamente de dos formas, según sea el objetivo: maximizar o minimizar una función económica. La formulación matemática del objetivo de maximización puede hacerse de la siguiente manera:

Dada una unidad de decisión sujeta a una tecnología lineal de producción y con restricciones en la disponibilidad de los insumos productivos, se puede generalizar un modelo matemático. Si el objetivo del centro decisor es un *objetivo maximizador*, el problema se puede formular como sigue:

Planteadas las n actividades posibles $P_1, P_2, \ldots P_j$ con $j = 1,2,\ldots, n$, se busca:

$$\text{Max } Z = c_1 * X_1 + c_2 * X_2 + \ldots + c_n * X_n = \sum_{j=1}^{n} c_j * X_j$$

siendo:

X_j : dimensión o nivel de la actividad P_j (incógnitas)
c_j : variación en Z motivada por una unidad de la actividad P_j
Z: función económica a maximizar

sujeto a las siguientes condiciones o restricciones:

$a_{11} * X_1 + a_{12} * X_2 + \ldots + a_{1n} * X_n \leq b_1$ (restricción de máximo)
$a_{21} * X_1 + a_{22} * X_2 + \ldots + a_{2n} * X_n \geq b_2$ (restricción de mínimo)
$a_{31} * X_1 + a_{32} * X_2 + \ldots + a_{3n} * X_n = b_3$ (restricción de igualdad)

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{m1} * X_1 + a_{m2} * X_2 + \ldots + a_{mn} * X_n \leq b_m$$

$$X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n \geq 0 \qquad \text{(condición de no negatividad)}$$

dónde:

b_i : es la cantidad disponible del recurso i (dimensión de la restricción), con i = 1, 2, 3,...., m recursos o restricciones que pueden limitar la dimensión de las actividades.

a_{ij} : es la cantidad del recurso i requerida (o aportada) por una unidad de la actividad P_j. Es el coeficiente de la relación insumo-producto.

El modelo precedente se resume y presenta generalmente en forma de matriz en la que se debe establecer todo el conjunto de relaciones que caracterizan el problema a resolver por la empresa: las actividades realizables (P_j), su aporte o requerimiento a la función objetivo (a_{ij}), la contribución a la función objetivo (c_j) y el medio en que se desarrollan las actividades (b_i).

Cada actividad corresponde a una columna (o vector columna) de la matriz y debe incluirse en forma unitaria. Los coeficientes a_{ij} de la matriz llevan signo positivo cuando corresponden a un requerimiento y signo negativo cuando corresponden a un aporte. En la función objetivo Z , tratándose de un objetivo maximizador, los márgenes, ingresos o beneficios son positivos y los costos (o las actividades que solo originan costos) son negativos.

Transcribiendo este modelo en forma matricial [Parikh y Bailey, 1990] se tiene:

P_1	P_2	...	P_n		P_0
c_1	c_2	...	c_3		
		A			
a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	$\leq$	b_1
a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	$\geq$	b_2
a_{31}	a_{32}	..	a_{3n}	=	b_3
...	...	...	...		...
a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	$\leq$	b_m

dónde c es un vector fila de precios, P es un vector columna de actividades, A es una matriz de coeficientes técnicos insumo-producto a_{ij} y b es un vector columna de recursos disponibles. Este último se suele denominar también RHS, sigla de la terminología inglesa *right hand side*, o vector columna P_0.

En el esquema se ha ejemplificado que las restricciones pueden ser de máximo, de mínimo e incluso de igualdades. En un problema de maximización predominarán naturalmente las restricciones de máximo (límites que no se pueden sobrepasar, dados por la disponibilidad de los recursos), mientras que en un problema de minimización habrá principalmente restricciones de mínimo (condiciones mínimas que se deben cumplir).

8. LOS RESULTADOS DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL

La programación lineal es un procedimiento matemático y como tal, implica un conjunto de operaciones repetitivas o algoritmo. Si bien existen varios métodos de resolución, el empleado generalmente es el método Simplex.

Una de las ventajas más destacables de la PL es que el método no sólo proporciona el plan óptimo junto con el valor de la función objetivo, sino que además aporta un conjunto de resultados adicionales tan o más útiles que el mismo plan; ofrece información valiosa para la toma de decisiones, que los demás métodos de planificación no están en condiciones de proporcionar [Davis & Johnson, 1987; Frank, 2001].

8.1. LA SOLUCIÓN

El primer resultado de la PL es el **plan óptimo** con la determinación de las variables y su dimensión o nivel. Dicho en términos económicos, la solución señala qué actividades y cuánto de cada una de ellas debe realizar la empresa para optimizar el resultado. La PL, a diferencia de los restantes métodos de planificación, es el único que proporciona un óptimo con precisión matemática.

Conjuntamente con el plan óptimo es calculado el **valor de la función objetivo**, normalmente el margen bruto total o el beneficio de la empresa en los casos de maximización o el costo mínimo en los casos de minimización.

Otro de los resultados que se obtienen es la cuantificación del **uso de los recursos**, es decir cuánto se utilizó de cada restricción. Obviamente en las restricciones de igual o menor no se puede utilizar más que el correspondiente valor de b_i y en las de mayor o igual, menos de dicho valor. A veces resulta más práctico calcular la cantidad sobrante del recurso. Esta información es útil para conocer dónde se hallan los "cuellos de botella" y dónde los excedentes de la empresa.

8.2. EL ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

Uno de los supuestos de la PL es la certeza de datos, es decir que supone que las hipótesis planteadas sobre precios y rendimientos se cumplirán en la realidad. Este supuesto tiene algunas limitaciones debido a la aleatoriedad de factores exógenos como el clima y el comportamiento de los mercados a que están sujetas las empresas forestales.

Por este motivo, después de haber obtenido una solución, cabe la duda de en qué medida puede variar la solución si se modifican esos datos. Este análisis se conoce como **análisis de sensibilidad** (en qué medida la solución es sensible a las modificaciones) o también **análisis de estabilidad** (cuán estable es la solución frente a los cambios) [Frank, 2001].

La estabilidad de una solución es uno de los aspectos más importantes en el análisis de un resultado. Lo esperable es que las soluciones obtenidas sean estables, es decir poco sensibles a las variaciones en los datos.

Junto con las actividades retenidas en la solución también se obtienen otros resultados adicionales: el rango de validez de los coeficientes, el costo de sustitución de las actividades, el costo de oportunidad de los recursos y su rango de validez. La interpretación de estos resultados adicionales constituyen parte del análisis de sensibilidad.

El **rango de validez de los coeficientes c_j** indica dentro de qué limites puede variar el coeficiente c_j de cada actividad sin que se modifique la solución. Este es un dato importante que permite obtener conclusiones acerca de la estabilidad de la solución, cuya única limitante es la condición *ceteris paribus* (a invariabilidad de los restantes datos).

El **costo de sustitución de una actividad** que no ha sido incluida en la solución informa en cuánto se reducirá el valor de la función objetivo en caso de introducir una unidad de esa actividad en la solución. También se puede expresar de otra forma: el costo de sustitución indica en cuánto debe aumentar el coeficiente c_j de una actividad para poder ingresar en la solución. Es este otro resultado valioso en la determinación de la estabilidad de la solución, en lo que hace a las actividades excluidas. El costo de sustitución de una variable que se halla en la solución es cero, mientras que el de una excluida es mayor que cero.

El **costo de oportunidad de los recursos agotados**, o sea la productividad marginal de los mismos, indica en cuánto variaría el valor de la función objetivo si la cantidad de esos recursos se incrementaran en una unidad. Esta productividad marginal es cero en el caso de los insumos sobrantes. También aquí el resultado obtenido se ve acotado por la condición *ceteris paribus*. Por otra parte, el costo de oportunidad sólo es válido dentro de ciertos límites, dado que la productividad marginal normalmente es decreciente. El rango de validez de los costos de oportunidad informa sobre estos límites y se trata de otro resultado adicional que proporciona el cómputo de una matriz de programación lineal.

8.3. LOS PROGRAMAS INFORMÁTICOS DE PROGRAMACIÓN LINEAL

El uso de computadoras para resolver problemas por medio de la PL hace que el método sea interesante para analizar situaciones complejas que requieran una gran cantidad de cálculos. En la actualidad existen variados programas informáticos para aplicar esta técnica, que permiten el tratamiento de grandes volúmenes de información.

Entre los *software* mas utilizados en PL se pueden citar los siguientes: GAMS, MPS, PLINEAL, CMS (Computer Model For Management Science), LINDO (Linear Interactive Discrete Optimizer) y su versión moderna bajo entorno *Windows,* el LINGO. Además de éstos, también se pueden hallar programas en hojas de cálculo como por ejemplo la opción SOLVER de *Excel*.

Naturalmente, la forma en que los resultados son presentados varían de acuerdo con el programa utilizado.

9. APLICACIONES DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL

Con el fin de mostrar el uso de esta técnica en la resolución de problemas de manejo forestal, se presentarán y desarrollarán dos ejemplos sencillos. En el primero de ellos (Problema 1) se describe detalladamente el procedimiento que lleva a la obtención de la solución de un problema de maximización, mientras que el segundo (Problema 2) pretende ejemplificar un problema de minimización de un objetivo.

9.1. ENUNCIADO DEL PROBLEMA 1[4]

Un consultor forestal visitó a un pequeño propietario de tierras y regresó con la información que describe su situación con respecto al manejo que realiza de la misma. Se trata de un granjero estadounidense de tiempo parcial que posee 24 hectáreas disponibles y quiere usarla para incrementar sus ingresos. Las alternativas de destino de la tierra que se le presentan son dos: transplantar árboles de Navidad híbridos de rápido crecimiento que maduran en un año, o bien engordar novillos poniendo la superficie a pasturas. Los árboles de Navidad se plantan y se venden en lotes de 1.000 unidades. Para desarrollar un lote de 1.000 árboles se necesitan 1,5 has y engordar 1 novillo requiere 4 has. Además el granjero dispone sólo de 200 horas al año para dedicarle a esta actividad. La experiencia muestra que se necesitan 20 horas para cultivar, podar, cosechar y empaquetar un lote de árboles. Por otro lado se requieren 20 horas para atender cada novillo. Este productor tiene $ 1.200 de presupuesto disponible; sus gastos anuales son de $ 30 por cada lote de árboles y $ 240 por novillo. Además ya tiene realizado un contrato con sus vecinos por 2 novillos. En precios corrientes, los árboles de Navidad le darán un retorno líquido de $ 0,50 cada uno, en tanto que cada novillos le redituarán $ 1.000.

Efectuado el levantamiento de datos, el consultor decide que un planteo matemático del problema, en términos de objetivos y restricciones, podrá ayudar al productor a tomar la decisión.

9.1.1. Representación algebraica del problema

<u>Objetivo</u>: aumentar los ingresos del productor: maximizar su margen líquido

<u>Actividades posibles</u>:

A_1 = criar y engordar novillos
A_2 = cultivar árboles de Navidad

[4] Extraído y adaptado de Davis & Johnson [1987].

Dimensión o nivel de las actividades (incógnitas):

X_1 = número de novillos engordados por año
X_2 = número de lotes de 1.000 árboles por año

Función Objetivo:

$$\mathbf{Z\ máx = 1.000\ X_1 + 500\ X_2}$$

(\$/año) = (\$/novillo)* (novillos/año) + (\$/novillo)* (novillos/año)

siendo: \$ 1.000: margen líquido por novillo (c_1)
\$ 500 : margen líquido por lote de árboles (c_2)

Restricciones de:

- Tierra: 24 has disponibles (b_1)
  4 has por novillo (a_{11})
  1,5 has por lote de árboles (a_{12})

$$\mathbf{4\ X_1 + 1{,}5\ X_2 <= 24}$$

- Presupuesto: \$ 1.200 disponibles (b_2)
  \$ 240 por novillo (a_{21})
  \$ 30 por lote de árboles (a_{22})

$$\mathbf{240\ X_1 + 30\ X_2 <= 1.200}$$

- Mano de Obra: 200 horas disponibles (b_3)
  20 horas por novillo (a_{31})
  20 horas por lote de árboles (a_{32})

$$\mathbf{20\ X_1 + 20\ X_2 <= 200}$$

- Contrato: por lo menos 2 novillos (b_4) deben producirse para cumplir el contrato previo.

$$\mathbf{X_1 >= 2}$$

- No Negatividad: todas las actividades deben ser positivas:

$$\mathbf{X_1 >= 0} \quad \text{y} \quad \mathbf{X_2 >= 0}$$

9.1.2. Resolución gráfica

La resolución gráfica permite visualizar mejor el problema en su conjunto y su mecanismo de solución. Sin embargo es necesario advertir que gráficamente sólo pueden ser resueltos problemas con dos actividades alternativas (dos incógnitas).

La solución gráfica comprende dos etapas:

a) Determinación del campo de factibilidad, y
b) Obtención del valor extremo de la función objetivo.

a) Determinación del Campo de Soluciones Posibles

Como el problema planteado considera dos actividades alternativas, se lo puede representar en un gráfico de dos dimensiones. El campo factible estará siempre en el primer cuadrante, dada la condición de no negatividad de las actividades.

La ecuación de la recta que representa la restricción de la tierra, indica que la superficie utilizada por la actividad X_1, más la superficie usada por la actividad X_2, no debe superar las 24 hectáreas. La situación extrema ocurre cuando se da la condición de igualdad:

$$4\ X_1 + 1{,}5\ X_2 = 24 \text{ hectáreas}$$

Para representar gráficamente la recta, se determinan dos puntos cualesquiera. Entonces:

$$\text{Si } X_1 = 0 \implies X_2 = 24 / 1{,}5 = 16 \text{ novillos}$$

$$\text{y si } X_2 = 0 \implies X_1 = 24 / 4 = 6 \text{ novillos}$$

Esta recta corresponde al pleno uso del factor tierra. En cualquier punto de dicha recta (dentro del primer cuadrante), el insumo tierra para las dos actividades es igual a la disponibilidad de la misma. Como se muestra en la Figura 1, la recta delimita dos semiplanos de los cuales el que contiene el origen, comprende el campo de factibilidad de todas las soluciones posibles en función de este insumo, representado por el área del triángulo OAB.

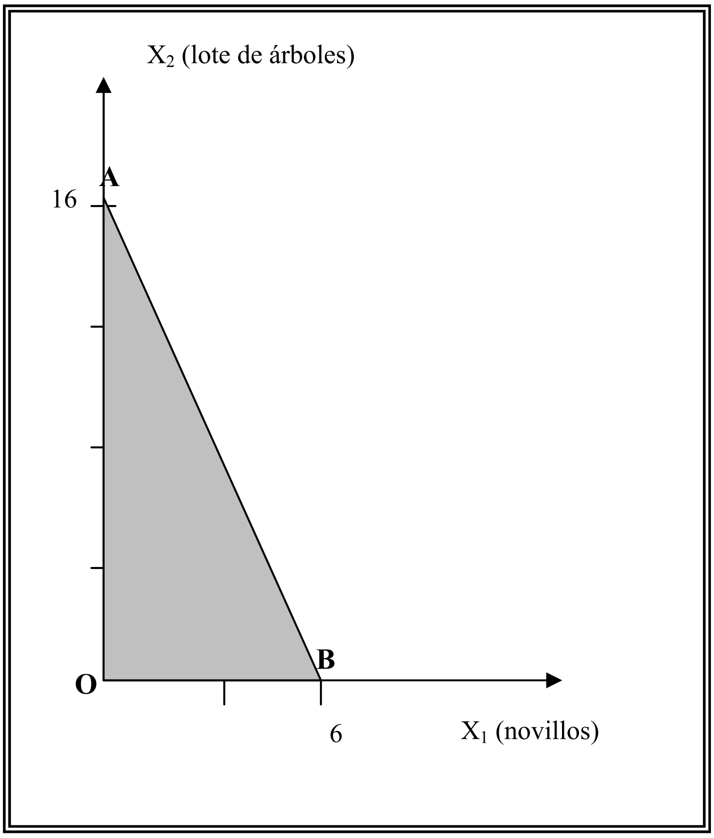

Figura 1. Área de factibilidad delimitada por la restricción de la Tierra

Para la restricción del presupuesto, la ecuación de la recta que expresa el pleno empleo de este factor es la siguiente:

$$240\ X_1 + 30\ X_2 = \$\ 1.200$$

Cuando:

$X_1 = 0$ ====➔ $X_2 = 1.200 / 30 = 40$ novillos

$X_2 = 0$ ====➔ $X_1 = 1.200 / 240 = 5$ novillos

De esta manera, como puede observarse en la Figura 2, queda delimitado el triángulo OED que incluye las soluciones posibles en función del presupuesto disponible.

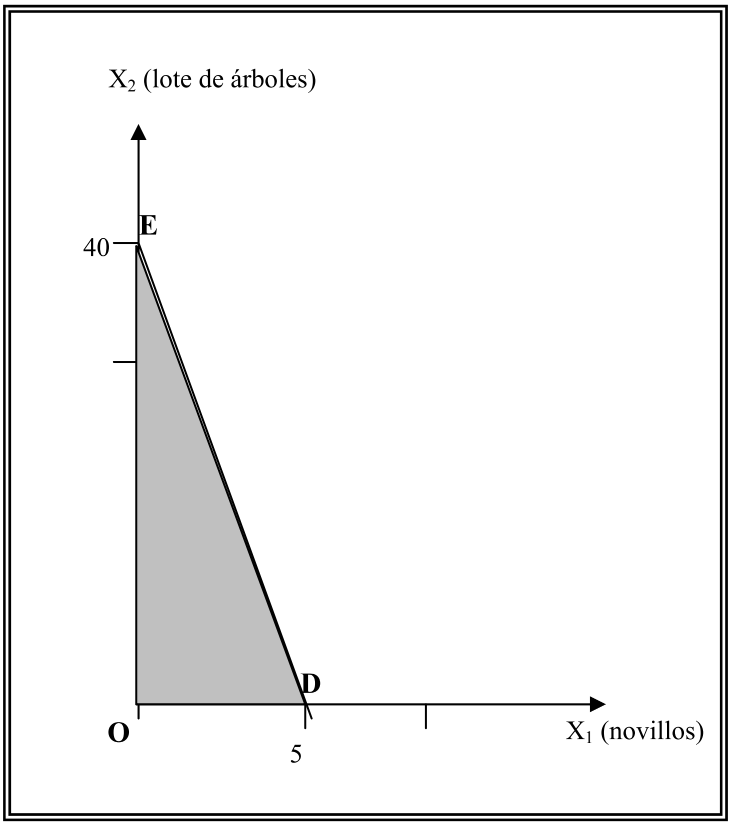

Figura 2. Área de factibilidad delimitada por la restricción del Presupuesto

Para la restricción de la mano de obra, la ecuación que corresponde al uso total del recurso es:

$$20\ X_1 + 20\ X_2 = 200 \text{ horas}$$

Cuando:

$$X_1 = 0 \ \text{====}\!\Rightarrow X_2 = 200 / 20 = 10 \text{ novillos}$$

$$X_2 = 0 \ \text{====}\!\Rightarrow X_1 = 200 / 20 = 10 \text{ novillos}$$

El área del triángulo OFG de la siguiente figura (Figura 3) incluye el campo de soluciones posibles en función del uso de la mano de obra.

Para la restricción del contrato, la expresión matemática de la recta que describe la situación límite es la siguiente:

$$X_1 = 2 \text{ novillos, para cualquier valor de } X_2$$

Las soluciones factibles, en este caso estarán delimitadas por la recta M M' como se muestra en la Figura 4.

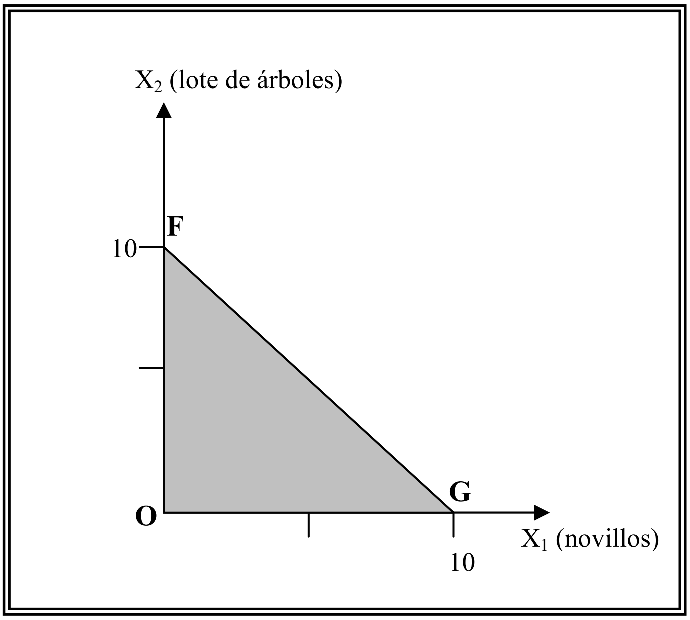

Figura 3. Área de factibilidad delimitada por la restricción de la Mano de Obra

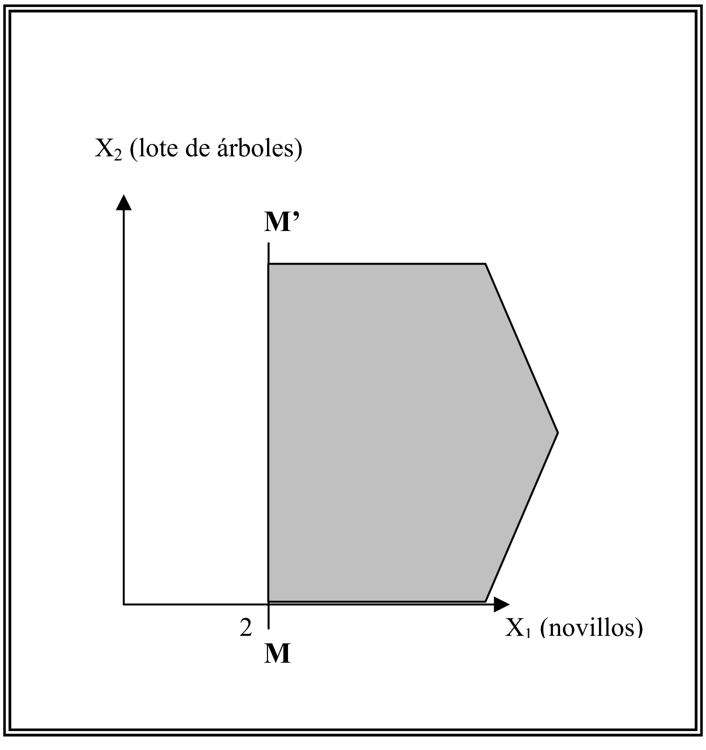

Figura 4. Zona de factibilidad determinada por la restricción del Contrato

Por último, combinando todas las restricciones en la Figura 5, la **Región de Soluciones Factibles** se reduce a la superficie del polígono MPQRD. Todas las rectas representadas en el gráfico se denominan rectas de "isoconsumo" de los recursos disponibles.

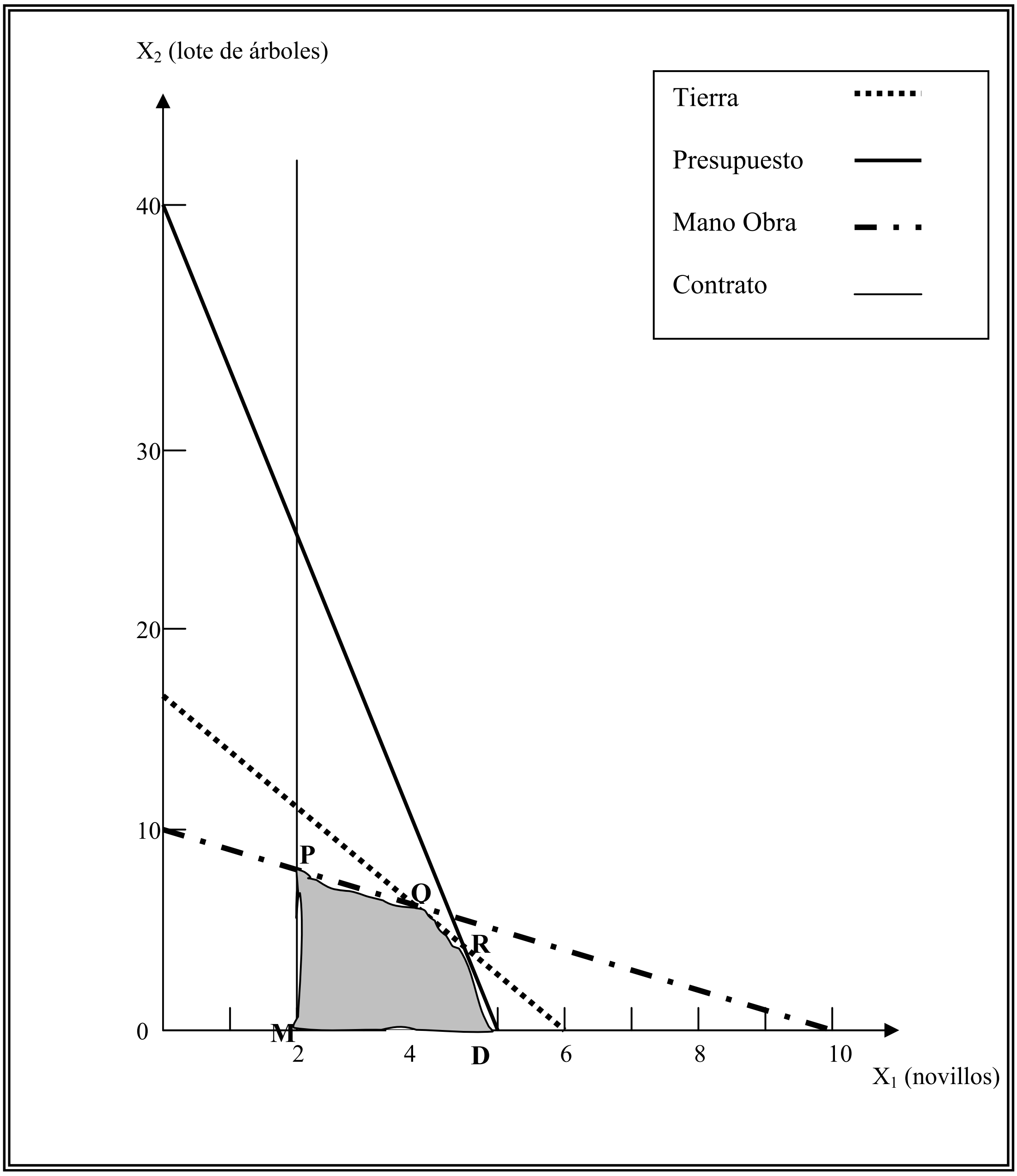

Figura 5. Región de Soluciones Factibles delimitada por todas las restricciones

b) Obtención del valor extremo de la Función Objetivo

Obtener el valor extremo de la función objetivo significa, en el Problema 1 planteado, maximizar la función económica Z (margen líquido total), es decir, encontrar el punto del polígono que corresponda al mayor valor de Z. La ecuación que expresa la función objetivo Z fue definida como:

$$Z = 1.000\ X_1 + 500\ X_2$$

Esta misma ecuación puede expresarse en la forma:

$$X_2 = (Z / 500) - (1.000 / 500\ X_1) = (Z / 500) - 2\ X_1$$

en donde (Z / 500) es la ordenada al origen y - 2 es la pendiente de la recta.

Z puede tomar diferentes valores, generando una familia de ecuaciones. Asignando un valor cualquiera a Z, por ejemplo, Z = $ 3.000, la ecuación será:

$$X_2 = (3.000 / 500) - 2\ X_1$$

$$X_2 = 6 - 2\ X_1$$

En todos los puntos de dicha recta, el margen líquido total será de $ 3.000. Si:

$$X_1 = 0 \Longrightarrow X_2 = 6$$
$$X_2 = 0 \Longrightarrow X_1 = 3$$

Atribuyendo diferentes valores a Z, la recta se desplazará paralelamente, cambiando únicamente la ordenada al origen. El propósito es ir aumentando su valor de modo que la recta se aleje del origen hasta que tenga un solo punto en común con el polígono. Todo valor de Z por encima de dicho punto corresponderá a una solución no factible, por encontrarse fuera del área de soluciones posibles, delimitada por las restricciones.

La Figura 6 presenta las rectas correspondientes a los siguientes valores de la función objetivo: Z = $ 3.000, Z = $ 6.000 y Z = $ 9.000.

Por otro lado, combinando las figuras 5 y 6 es posible encontrar la solución óptima, esto es, la que presenta el máximo valor de Z dentro del área de factibilidad (Figura 7).

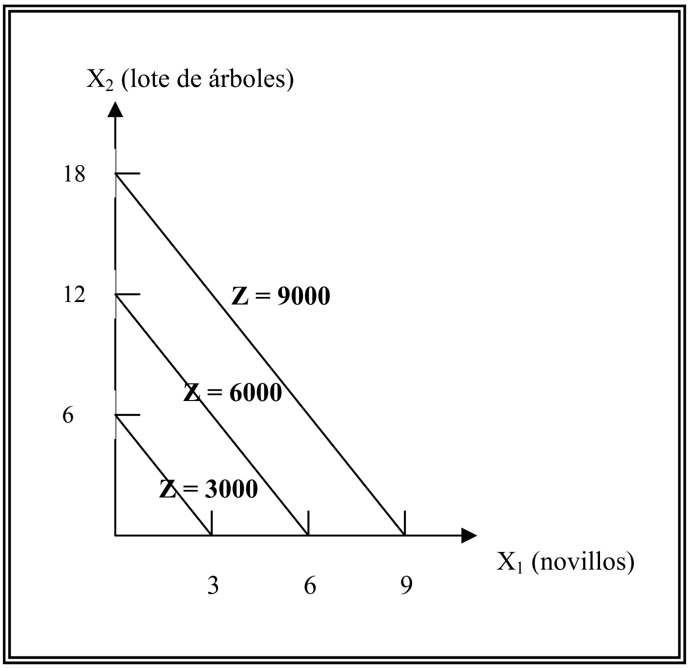

Figura 6. Representación de las rectas para Z = $ 3000, $ 6.000 y $ 9.000

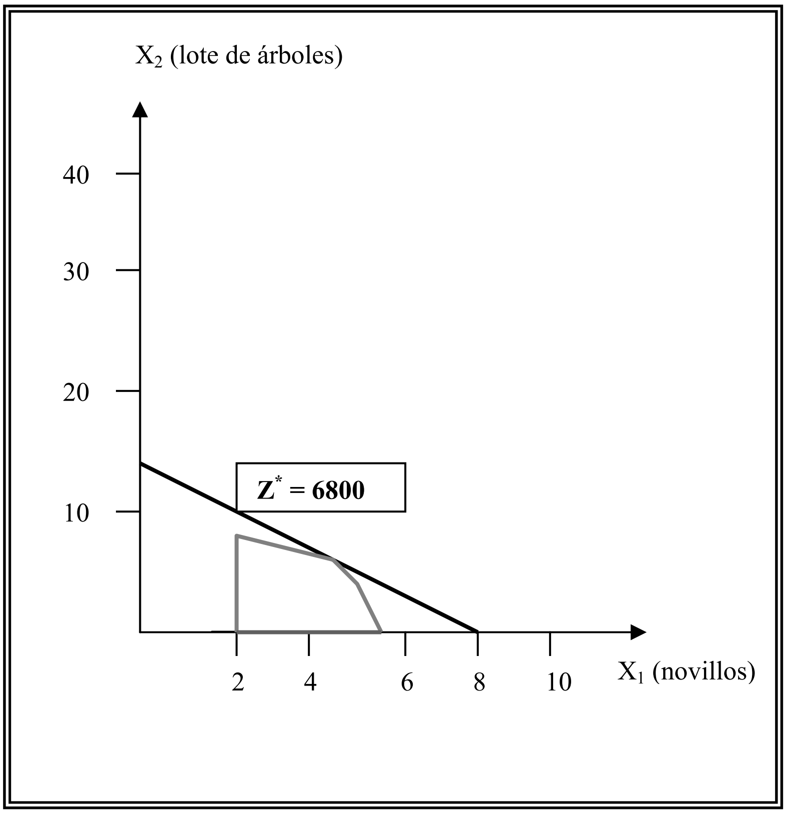

Figura 7. Representación gráfica de la Solución Óptima

En el Cuadro 1 se transcriben los puntos vértices M,D,R,Q y P del polígono, que representan las llamadas soluciones factibles básicas y también los valores de Z para cada uno de ellos, representados en la Figura 8.

Cuadro 1. Valores de Z para las soluciones factibles básicas

Punto	X_1	X_2	Z
M	2	0	2.000
D	5	0	5.000
R	4,5	4	6.500
Q	**3,6**	**6,4**	**6.800**
P	2	8	6.000

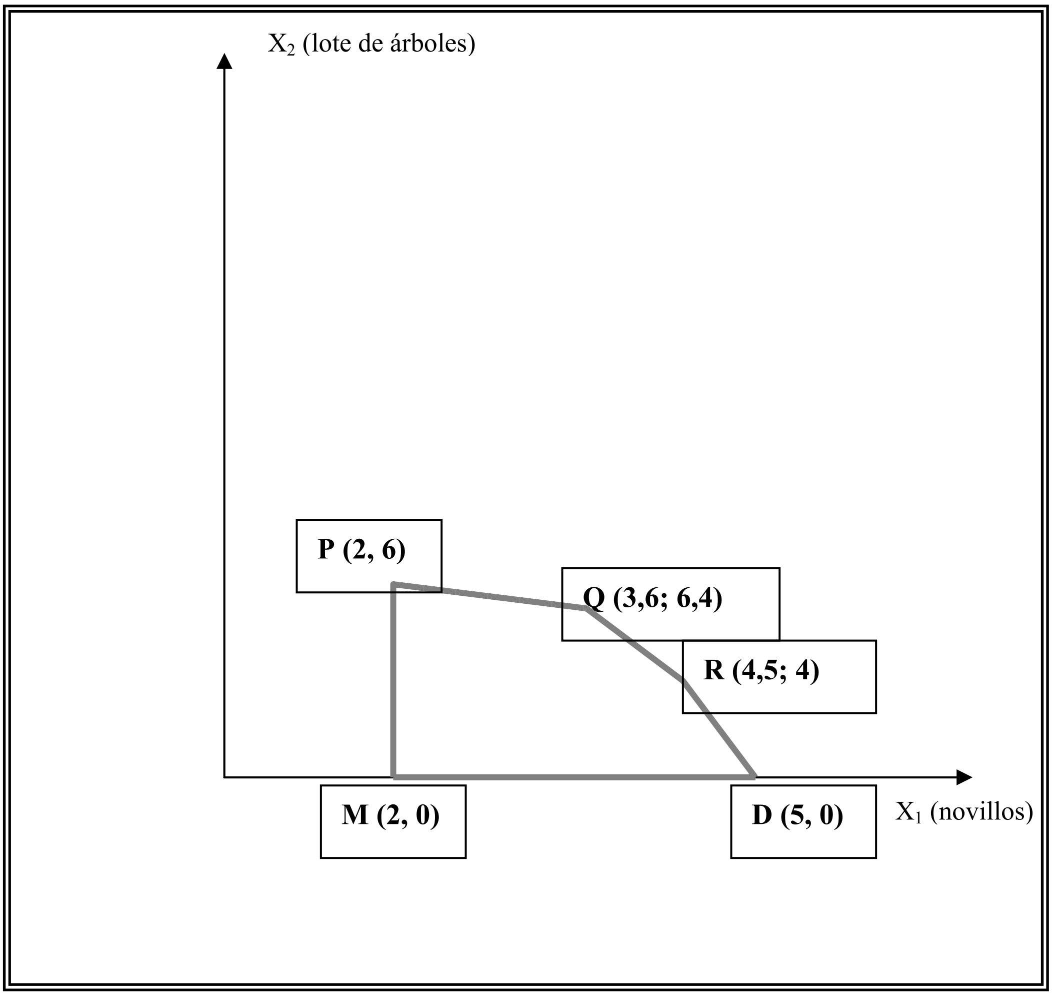

Figura 8. Soluciones Factibles Básicas

El punto vértice Q presenta el valor más alto de Z (**Z^* = $ 6.800**) y define el nivel de actividad de **X_1^* = 3,6** y de **X_2^* = 6,4.** Ninguna otra combinación de actividades podrá aumentar el valor de Z, si se respetan las restricciones. Este es el **Plan Óptimo** buscado, el cual sugiere hacer 3,6 novillos y 6,4 lotes de árboles, obteniéndose en total, un ingreso líquido máximo de $ 6.800.

9.1.3. Resolución informática. Análisis e interpretación

En el Cuadro 2 se muestra una salida de computadora generada con el programa LINDO, que corresponde a la solución del problema planteado.

Cuadro 2. Salida informática de LINDO con la solución del Problema 1

```
                    SECTION   1
              MAX     1000 X1 + 500 X2
SUBJECT  TO
      2) 4 X1 + 1.5 X2 <= 24
      3) 240 X1 + 30 X2 <= 1200
      4) 20 X1 + 20 X2 <= 200
      5) X1  >= 2
END

                    SECTION   2
           LP OPTIMUM FOUND AT STEP    3
             OBJECTIVE FUNCTION VALUE

      1)    6800.00

                    SECTION   3
      VARIABLE          VALUE        REDUCED COST
            X1          3.600              0.00
            X2          6.400              0.00

                    SECTION   4
           ROW          SLACK        DUAL PRICES
            2)          0.00               200.00
            3)          144.00             0.00
            4)          0.00               10.00
            5)          1.600              0.00

                    SECTION   5
              COST COEFFICIENT RANGES
      VARIABLE    CURRENT    ALLOWABLE        ALLOWABLE
                  COEF       INCREASE         DECREASE
            X1    1000.00    333.33           5000.00
            X2    500.00     500.00           125.00

                    SECTION   6
               RIGHTHAND SIDE RANGES
           ROW    CURRENT    ALLOWABLE        ALLOWABLE
                  RHS        INCREASE         DECREASE
            2)    24.00      1.71             4.00
            3)    1200.00    INFINITY         144.00
            4)    200.00     53.33            30.00
            5)    2.00       1.600            INFINITY
```

Los resultados contenidos en la solución del Problema 1 muestran, además de los valores óptimos de las variables, otra información adicional, tal como: el costo de oportunidad de los recursos, el costo de sustitución de las actividades y el denominado análisis de sensibilidad de los resultados (ver Cuadro 2). A los fines de un análisis detallado, la solución puede dividirse en seis secciones:

SECCIÓN 1

Muestra las ecuaciones del problema.

SECCIÓN 2

Anuncia que la solución óptima puede encontrarse después de tres pasos o iteraciones y que el valor de la función objetivo en el óptimo es Z = $ 6.800.

Si no puede encontrarse una solución óptima al problema[5], esta sección anunciará el mensaje “no hay solución factible”.

SECCIÓN 3

En este apartado se responde al problema, dando a las variables los valores correspondientes en el óptimo (nivel de actividad): 3,6 novillos para X_1 y 6,4 lotes de árboles para X_2.

La columna “costo de sustitución” (*reduced cost*) de las actividades informa acerca de las variables que tienen valor cero en la solución. En el caso del ejemplo, ambas variables tienen valores positivos, por lo tanto no puede avanzarse en el análisis.

SECCIÓN 4

La columna “variables flojas o de poca actividad” (*slack*) muestra la cantidad de recursos que no han sido totalmente utilizados en el plan óptimo, en relación a las restricciones iniciales (RHS: “valores laterales de la derecha”). Por

[5] Una solución no factible se tiene cuando las condiciones impuestas por las restricciones son contradictorias. Por ejemplo, si mediante una restricción se establece que $x_1 > 5$ y mediante otra que $x_1 <= 3$, en este caso no hay solución porque se carece de un área de factibilidad [Frank, 2001].

ejemplo, un *slack* de $ 144 para el presupuesto, indica la cantidad de capital que no ha sido usado en la solución óptima: sólo se utilizaron $ 1.056 ($ 1.200 - $ 144) del total disponible. Donde el *slack* es igual a 0, indica que el recurso ha sido agotado: en este caso, las 24 hectáreas de tierra y las 200 horas de mano de obra son íntegramente usados en el plan óptimo.

La segunda columna de la Sección 4 se refiere al “precio sombra” o “precio dual” (*dual price*) o más específicamente llamado **costo de oportunidad** de los insumos; este es el valor que la empresa asigna internamente a cada uno de los recursos de que dispone.

Una vez alcanzado el plan óptimo se observa que hay recursos totalmente utilizados (con *slack* igual a cero). Estos son los que ejercen tensión y han limitado la solución. Otros han sido parcialmente ocupados o no se utilizaron (con valores de *slack* positivo). Son los insumos flojos o sobrantes que están en exceso. La columna *slack* muestra el saldo no utilizado.

Los <u>recursos no limitantes</u> (sobrantes) tienen costo de oportunidad igual a cero. Disponer de mayor cantidad de ellos, no modifica en nada la solución. Desde la óptica de la empresa, su valor es cero.

En el ejemplo tratado, el presupuesto con exceso de $144 y el cumplimiento del contrato con un exceso de 1,6 novillos, tienen para la empresa un costo de oportunidad igual a cero.

Los <u>recursos limitantes</u> (agotados) poseen costo de oportunidad positivo. Disponer de mayores cantidades de ellos, implicaría un aumento en la función objetivo Z, o en otros términos, disponer de menores cantidades, reduciría la función económica Z.

En el problema planteado, la tierra (con exceso 0) tiene un costo de oportunidad igual a $ 200. La mano de obra (también totalmente agotada) presenta un costo de oportunidad igual a $ 10.

El **costo de oportunidad** de una restricción es "el valor en que se reduce la función objetivo cuando la disponibilidad de ese insumo se reduce en una unidad" [Frank, 2001]. Se puede generalizar este concepto afirmando que "la variación en el valor de Z cuando varía en una unidad algunos de los recursos limitantes, expresa la valorización unitaria de cada recurso, es decir su costo de oportunidad" [Regúnaga, 1982].

Según Davis & Johnson [1987] este concepto también puede interpretarse como la "máxima variación que puede tener el valor de Z cuando se aumenta o disminuye en una unidad, el recurso limitante". Para el ejemplo, si se dispusiera de 1 ha más de tierra, Z se incrementaría en $ 200; dicho de otro modo, si se renunciara a 1 ha de tierra en el plan óptimo, Z se reduciría en $ 200.

Por otro lado, se puede verificar que la suma de los recursos iniciales multiplicados por sus respectivos costos de oportunidad, da como resultado el valor del ingreso líquido total en el óptimo:

$$Z = \Sigma\, b_i * dual\ price$$

En el ejemplo:

Z = (24 ha * $ 200) + ($ 1.200 * $ 0) + (200 hs * $ 10) + (2 unidades * $ 0) = $ 6.800

Los costos de oportunidad miden las tensiones que se ejercen en la empresa, dando una idea de la disponibilidad relativa de los diferentes recursos. Cuánto más escaso es un recurso, mayor será su costo de oportunidad.

El conocimiento de estos costos de oportunidad también permite evaluar la posibilidad de incluir nuevas actividades no contempladas en el plan original. Las actividades retenidas en el óptimo (caso de X_1 y X_2) pagan por los insumos que utilizan, el valor de su costo de oportunidad:

$$\Sigma\, a_{ij} * dual\ price = c_j$$

Por ejemplo, para la actividad X_1 (novillos):

(4 ha * $ 200) + ($ 240 * $ 0) + (20 hs * $ 10) + (1 unidad * $ 0) = $ 1.000

SECCIÓN 5 y SECCIÓN 6

Las secciones 5 y 6 muestran el análisis de sensibilidad. Dicho en otros términos, muestran los rangos o límites dentro de los cuales pueden variar los márgenes de cada una de las actividades o de las restricciones, sin que se modifique el plan óptimo.

La Sección 5 (*cost coefficient ranges*) muestra los coeficientes originales c_j bajo el título en inglés de *current coefficient* y los intervalos entre los cuales esos coeficientes iniciales pueden moverse por encima (*allowable increse*) y por debajo (*allowable decrece*), sin que se modifique la solución.

Para el ejemplo analizado, $ 1.000 es el margen inicial de la actividad X_1 de engordar novillos. Ese precio unitario de $ 1.000 por novillo puede aumentar $ 333,3 (1.000 + 333,3 = $ 1.333,3) o puede decrecer $ 500 (1.000 – 500 = $ 500) sin modificar la solución óptima que propone 3,6 novillos y 6,4 lotes de árboles. Desde ya, toda modificación dentro de estos límites va a alterar el valor de la función objetivo, el de los costos de sustitución y de los costos de oportunidad, pero no cambiará la dimensión de ninguna de las actividades.

En la Sección 6 (*righthand side ranges*) se observan los límites entre los cuales pueden incrementar o disminuir las disponibilidades iniciales de los recursos (restricciones), sin modificarse el plan óptimo. En el ejemplo, la disponibilidad de 24 hectáreas de tierra puede aumentar 1,71 ha (24 +1,71 = 25,71 has) o decrecer 4 ha (24 - 4 = 20 has) sin que cambie la solución, es decir, sin modificar los valores de los costos de oportunidad de los recursos.

9.2. ENUNCIADO DEL PROBLEMA 2 [6]

Una pequeña fábrica de pasta de madera produce pulpa mecánica y pulpa química en un pueblo cerca de un río. Las técnicas de producción usadas en la fábrica son tales que: a) cada tipo de pasta requiere 1 hombre-día por tonelada producida y b) la capacidad máxima de producción es 300 tn/día para la pasta mecánica y 200 tn/día para la pasta química.

[6] Extraído y adaptado de Buongiorno y Gilless [1987].

La producción de pulpa contamina el agua del río. La contaminación se mide en términos de materiales biodegradables tal como la Demanda Biológica de Oxígeno (BOD). La pulpa mecánica genera 1 BOD por tonelada producida mientras que la producción de pulpa química produce 1,5 BOD por tonelada. El precio de mercado de la pasta mecánica es de 100 $/tn y de la pasta química es de 200 $/tn.

El directorio de la empresa ha formulado las siguientes políticas operativas:
1. La fábrica debe generar, por lo menos, un ingreso bruto promedio de 40.000 $/día. Nótese que no hay deseo de maximizar ingresos, pero sí, generar el suficiente como para obtener un aceptable retorno sobre el capital.
2. La fábrica desea retener por lo menos 300 trabajadores empleados. Es una fábrica local pequeña, de modo que el gerente es muy conciente de su imagen en la comunidad.
3. La contaminación con BOD debe minimizarse.

9.2.1. Formulación algebraica del problema

Objetivo: minimizar la contaminación

Actividades productivas que contaminan:

A_1 = producción de pasta mecánica
A_2 = producción de pasta química

Dimensión o nivel de las actividades (incógnitas):

X_1 = cantidad producida de pasta mecánica (tn/día)
X_2 = cantidad producida de pasta química (tn/día)

Función Objetivo:

$$\mathbf{Z\ mín = 1\ X_1 + 1{,}5\ X_2}$$
(BOD/día) = (BOD/tn) * (tn/día) + (BOD/tn) * (tn/día)

siendo:

1 BOD/día: nivel de contaminación de la pasta mecánica (c_1)
1,5 BOD/día : nivel de contaminación de la pasta química (c_2)

Restricciones de:

- Mano de Obra: 300 o más trabajadores (b_1)
  1 hombre-día por tn de pasta mecánica producida (a_{11})
  1 hombre-día por tn de pasta química producida (a_{12})

$$\mathbf{1\ X_1 + 1\ X_2 >= 300}$$

- Ingreso Bruto: $ 40.000 o más (b_2)
  $ 100 precio de mercado de la pasta mecánica (a_{21})
  $ 200 precio de mercado de la pasta química (a_{22})

$$\mathbf{100\ X_1 + 200\ X_2 \ >= 40.000}$$

- Capacidad Productiva:
  300 tn/día de pasta mecánica (b_3)
  200 tn/día de pasta química (b_4)

$$\mathbf{X_1 \ <= 300}$$
$$\mathbf{X_2 \ <= 200}$$

- No Negatividad: todas las actividades deben ser positivas:

$$\mathbf{X_1 >= 0} \quad \text{y} \quad \mathbf{X_2 >= 0}$$

9.2.2. Resolución gráfica

Dado que se trata de un problema con dos incógnitas, la resolución gráfica es posible y permite visualizar mejor el problema en su conjunto.

a) Determinación del Campo de Soluciones Posibles

El campo factible estará siempre en el primer cuadrante, dada la condición de no negatividad de las actividades.

La ecuación de la recta que representa la restricción de la mano de obra, indica que la utilización de este recurso, para la actividad X_1 y la actividad X_2 debe cubrir, por los menos, 300 puestos de trabajo. La situación extrema ocurre cuando se da la condición de igualdad:

$$1\ X_1 + 1\ X_2 = 300 \text{ trabajadores/día}$$

Si X_1 = 0, entonces: X_2 = 300 tn/día

Si X_2 = 0, entonces: X_1 = 300 tn/día

Para la segunda restricción, restricción del ingreso bruto, la ecuación de la recta que expresa la situación límite es la siguiente:

$$100\ X_1 + 200\ X_2 = 40.000 \text{ \$/día}$$

Si X_1 = 0, entonces: X_2 = 40.000 / 200 = 200 tn/día

Si X_2 = 0, entonces: X_1 = 40.000 / 100 = 400 tn/día

La Figura 9 exhibe el área de soluciones factibles en función de la restricción mano de obra (superficie OAB) y la Figura 10 hace lo propio en función de la restricción del ingreso bruto (área OCD).

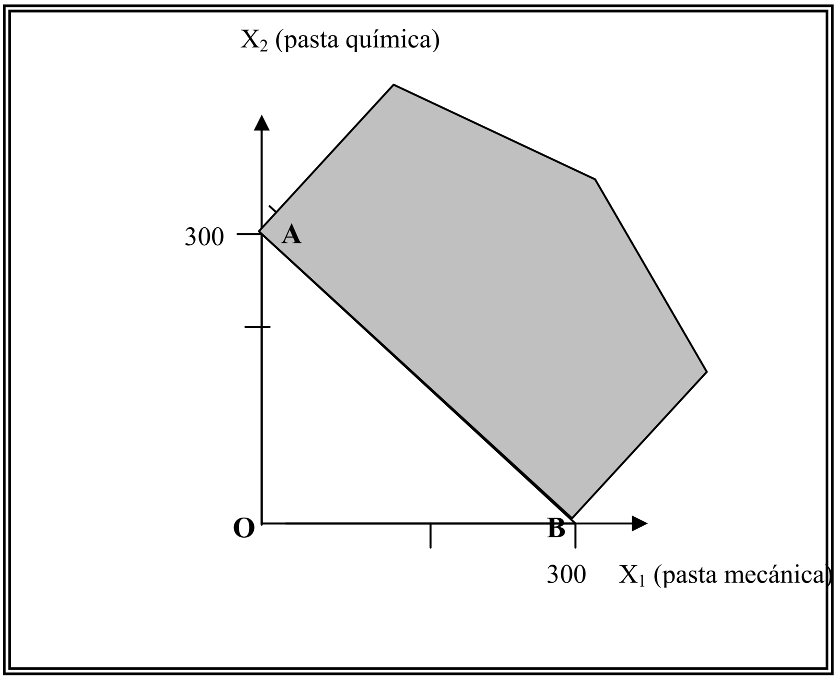

Figura 9. Área de factibilidad delimitada por la restricción Mano de obra

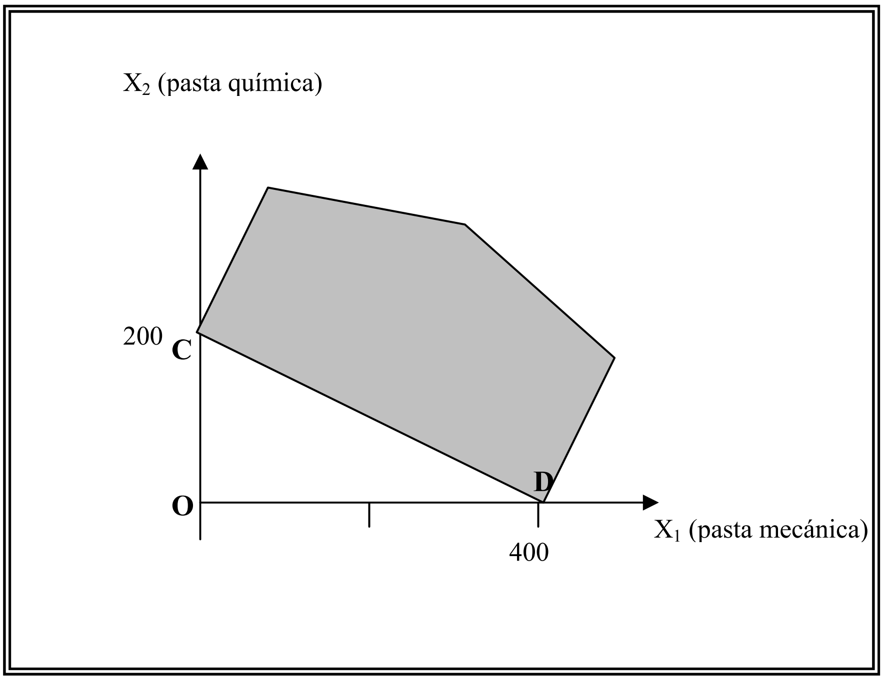

Figura 10. Área de factibilidad delimitada por la restricción Ingreso Bruto

En la restricción de la capacidad de producción, la expresión matemática de la recta que describe las situaciones de igualdad son:

X_1 = 300 tn/día para cualquier valor de X_2
y
X_2 = 200 tn/día para cualquier valor de X_1

Las soluciones factibles, en este caso estarán delimitadas por la recta M M' para la capacidad de producción de X_1 (Figura 11) y por la recta N N' para el caso de X_2 (Figura 12).

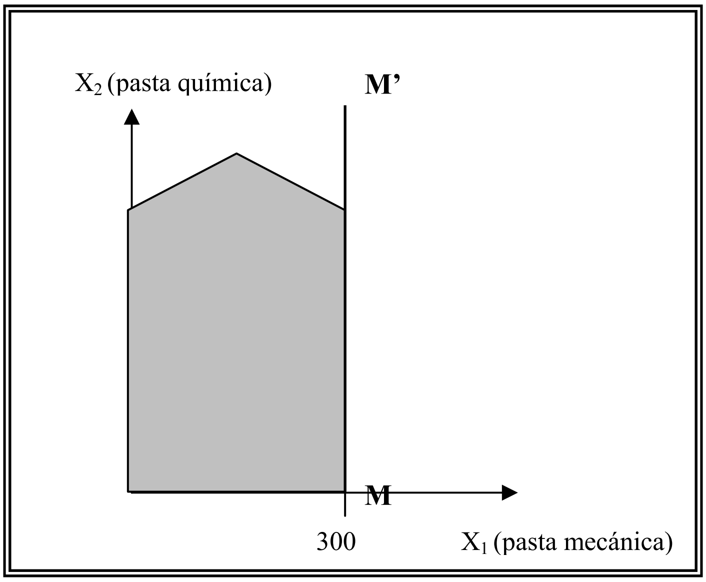

Figura 11. Área factible para la restricción Capacidad Producción de X_1.

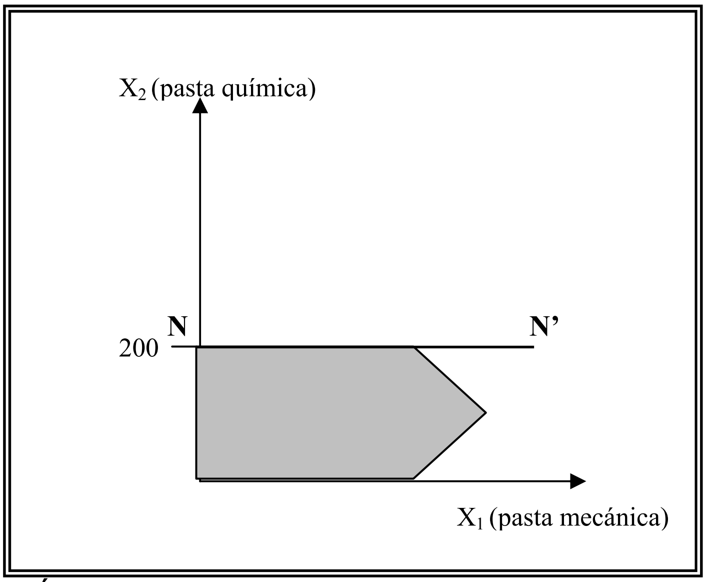

Figura 12. Área factible para la restricción Capacidad Producción de X_2.

Finalmente, si se combinan todas las restricciones en la Figura 13, la **Región de Soluciones Factibles** está representada por la superficie del polígono PQRS.

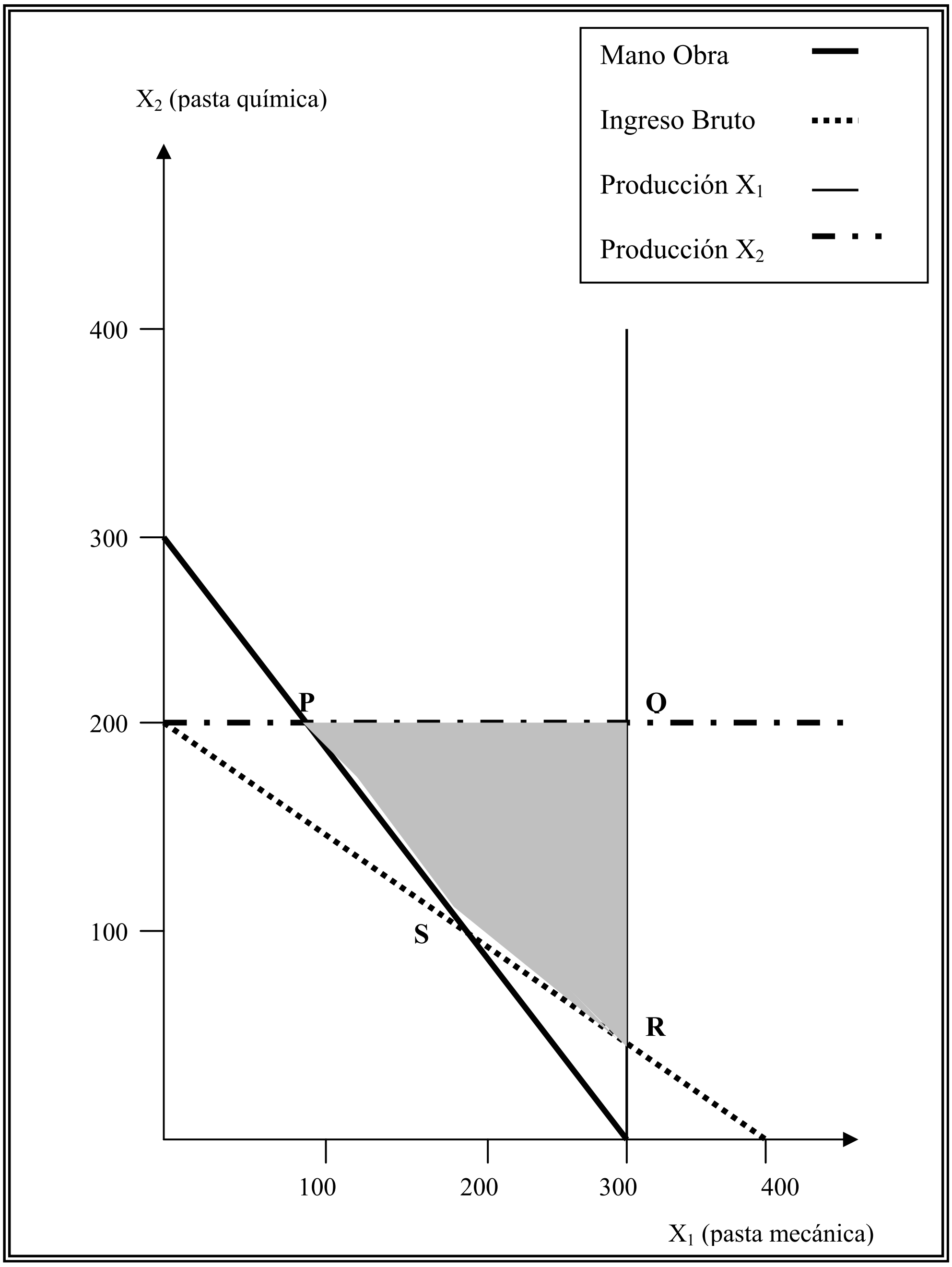

Figura 13. Área de Soluciones Factibles delimitada por todas las restricciones

b) Obtención del valor extremo de la Función Objetivo

En el caso del Problema 2 presentado, la obtención el valor extremo de la función objetivo significa minimizar la función ecológica Z (BOD: demanda biológica de oxígeno), es decir, encontrar el punto del polígono que corresponda al menor valor de Z. La ecuación que expresa la función objetivo Z fue definida como:

$$Z = 1\,X_1 + 1{,}5\,X_2$$

La familia de rectas correspondientes a esta función objetivo consisten en todas las paralelas a Z, donde Z puede tomar un valor cualquiera.

Por ejemplo, si Z = 150, entonces:

$$150 = 1\,X_1 + 1{,}5\,X_2$$

Si $X_1 = 0$, entonces: $X_2 = 150 / 1{,}5 = 100$

Si $X_2 = 0$, entonces: $X_1 = 150 / 1 = 150$

La región factible está limitada por las restricciones en las capacidades de producción de X_1 y X_2:

$$X_1 <= 300$$

$$X_2 <= 200$$

El punto satisface simultáneamente las dos ecuaciones:

$$X_1 + X_2 = 300 \quad (1)$$

$$100\,X_1 + 200\,X_2 = 40.000 \quad (2)$$

La solución de este sistema de ecuaciones es la **solución óptima X_1^*** y **X_2^*** .

Si se procede por eliminación, primero multiplicando por - 100 la ecuación (1), entonces:

$$-100\,X_1 - 100\,X_2 = -30.000 \quad (3)$$

y luego sumando las ecuaciones (2) y (3):

$$\begin{array}{rl} & 100\,X_1 + 200\,X_2 = 40.000 \\ + & \\ & -100\,X_1 - 100\,X_2 = -30.000 \\ \hline = & 100\,X_2 = 10.000 \end{array}$$

de donde $\mathbf{X_2^*}$ = 10.000 / 100 = **100**

valor que, sustituyendo en (1) resulta:

$$X_1 + \mathbf{100} = 300$$

$$\mathbf{X_1^*} = 300 - 100 = \mathbf{200}$$

El óptimo valor de la función objetivo es, por lo tanto:

$$\mathbf{Z^* = X_1^*} + 1{,}5\ \mathbf{X_2^*} =$$

$$(200) + 1{,}5\ (100) =$$

350 BOD/día

9.2.3. Resolución informática

La hoja de cálculo *Excel* incluye, con el nombre de SOLVER, la computación de problemas de programación lineal. La diferencia con otros programas específicos de PL, (tales como LINDO o LINGO) radica en que, en la hoja de cálculo, los datos del problema deben transcribirse en forma de matriz y no en forma de ecuaciones.

La ventaja de utilizar una planilla de cálculo no es sólo visualizar la matriz de PL, sino primordialmente la posibilidad de destinar otro sector de la hoja para cómputos auxiliares, cuyos resultados se pueden volcar automáticamente en la matriz. Esto facilita enormemente recalcular rápidamente cualquier dato utilizado y también efectuar correcciones.

El Cuadro 3 presenta el planteo del Problema 2 volcado en una matriz de una hoja de cálculo de *Excel*.

En el Cuadro 4 se puede observar la salida de computadora generada por la opción SOLVER del mismo programa, correspondiente a la solución del problema tratado. El *software* brinda dos informes de la solución: a) Respuesta y b) Sensibilidad. El informe de respuesta da el valor de la función objetivo, las actividades que se hallan en la solución óptima y su dimensión. El informe de sensibilidad ofrece información de los costos de sustitución, los costos de oportunidad y sus respectivos rangos de variación.

Cuadro 3. Matriz de programación lineal del Problema 2

Actividades	X1	X2		RHS	UsoRecursos
	tn/día	tn/día			
Z mínimo	1	1.5			
Mano Obra	1	1	>=	300	300
Ingresos Brutos	100	200	>=	40000	40000
Cap. Producción	1		<=	300	200
Cap. Producción		1	<=	200	100

Cuadro 4. Salida informática de SOLVER con la solución del Problema 2

Informe de Respuesta	
Celda objetivo (Mínimo)	
Nombre	Valor
Z mínimo	350
ACTIVIDADES	
Nombre	Nivel
Pasta Mecánica (X1)	200
Pasta Química (X2)	100

Cuadro 4 a. Informe de respuesta del Problema 2

Informe de Sensibilidad					
Actividad	**Dimensión Actividad**	**Costo Sustitución**	**Coeficiente Objetivo**	**Aumento permisible**	**Disminución permisible**
Pasta Mecánica	200	0	1	0.5	0.25
Pasta Química	100	0	1.5	0.5	0.5
Restricciones					
Nombre	**Uso del Recurso**	**Precio Sombra**	**Valor Coeficiente RHS**	**Aumento permisible**	**Disminución permisible**
Mano de Obra	300	0.5	300	50	100
Ingreso Bruto	40000	0.005	40000	10000	10000
Capacidad X1	200	0	300	1E+30	100
Capacidad X2	100	0	200	1E+30	100

Cuadro 4 b. Informe de sensibilidad del Problema 2

Para el análisis y la interpretación de estos resultados se aplican idénticos razonamientos que los expuestos en el caso del Problema 1.

10. CONSIDERACIONES FINALES

La resolución de un problema mediante la técnica de programación lineal permite obtener un plan óptimo de valor relativo, en función de la enunciación del mismo. Existen un sinnúmero de motivos por los que la primera solución obtenida no es totalmente confiable. La veracidad de los datos empleados y las simplificaciones hechas en la elaboración de la matriz condicionan los resultados. Por ello debe verificarse a grandes rasgos la factibilidad e implicancias de la solución obtenida.

Frecuentemente, durante el análisis del problema o de su primera solución, aparecen restricciones no consideradas originalmente como importantes o no tenidas en cuenta, ya que es bastante difícil, *a priori*, detallar todos los mecanismos del funcionamiento o plan de la empresa. Según Davis & Johnson [1987], estas razones hacen necesario un detallado análisis de la solución inicial y la revisión del planteo original.

Como puede apreciarse, la potencialidad de análisis que ofrece la PL es muy grande, especialmente en su aplicación a modelos de empresa. Pero a medida que se profundiza en el análisis es mayor el requerimiento de información. La falta de datos disponibles sobre muchos aspectos que hacen al funcionamiento de las empresas forestales, hace que el uso de esta técnica sea limitado, pero es indudable el valioso aporte que juega en la planificación empresarial.

11. BIBLIOGRAFÍA CITADA

Buongiorno J. y A. Gilless. 1987. Introduction to operations research. Methods in forest management. Departament of Forestry. University of Wisconsin. Madison. Estados Unidos.

Cordonier P. 1973. Economía de la empresa agrícola. Ediciones Mundi-Prensa. Madrid. España.

Davis L. & N. Johnson. 1987. Forest management. Third edition. McGraw-Hill. Inc. Estados Unidos.

Díaz A. M. 1994. Avaliação Económica de Sistemas de Produção para minifundios de Leandro Alem e San Javier, Misiones, Argentina. Tesis de Maestría en Economía Forestal. Universidad Federal de Viçosa. Minas Gerais. Brasil.

Díaz Balteiro L. y A. Prieto Rodríguez. 1999. Modelos de planificación forestal basados en la programación lineal. Aplicación al monte "Pinar de Navafría" (Segovia). Investigaciones Agrarias: Recursos Forestales, 8. España.

Frank R. 2001. Planeamiento de la empresa con programación lineal. Documento de Administración Rural. Facultad de Agronomía. Universidad de Buenos Aires. FAUBA. Buenos Aires.

Gargano A., M. Adúriz y M. Saldungaray. 1999. Modelación de agrosistemas con programación lineal y Monte Carlo para el partido de Coronel Rosales, Argentina. Revista Facultad de Agronomía (LUZ) 16: 562-576. Bahía Blanca. Buenos Aires.

Hernández Díaz J. 1985. La programación lineal y ejemplos de su aplicación en el manejo de bosques. Instituto Nacional de Investigaciones Forestales. México.

Mansfield E. 1990. Microeconomía. Teoría y aplicaciones. 2da. Edición. Capítulo 6. Editorial Tesis. Buenos Aires.

Parikh A. y D. Bailey. 1990. Techniques of economic analysis with applications. Harvester Wheatsheaf. Cambridge. Gran Bretaña.

Regúnaga M. 1982. Programación lineal. Documentación de Administración Rural Nº 18. Facultad de Agronomía. Universidad de Buenos Aires FAUBA. Buenos Aires.

Rehman T. 2001. An introductory economic interpretation of Linear Programming. Material didáctico del curso Economía de los Recursos Naturales. Instituto Agronómico Mediterráneo de Zaragoza. Centro Internacional de Altos Estudios Agronómicos Mediterráneos. España.

Schrage L. 1999. Optimization Modeling with LINDO. Lindo Systems Inc. Chicago. Estados Unidos.

Williams D. 1990. An introduction to the allocation of Project Resources with linear programming. Regional Training Workshop in Forest Resources Planning and utilization. Bangalore. India.